【理工学研究科物理学専攻（専門）解答例 と出題意図】

【出題意図】

1.(1)(2)は天文学の基礎である立体角の概念と天体の電磁波の放射機構等を理解しているか確認している。1.(3)(4)はごく基礎的な数学と力学の知識を問う問題。2は天体物理学の初歩である輻射輸送方程式を理解し導出できるか確認している。

【解答例】

1.　(1) $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\mathrm{rad}$ なので $1^\circ \times 1^\circ = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)^2 \mathrm{str.}$

全天球面は $4\pi\,\mathrm{str}$ なので $4\pi\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^2 = \dfrac{129600}{\pi}$ 平方度 である。

(2) HI（中性水素）輝線は超微細構造線であり、陽子と電子のスピンが平行状態から反平行状態に遷移するときに放射される。波長は21 cm。主に星間空間で観測される。温度は 10〜1000 K, 密度は 1〜100 $\mathrm{cm^{-3}}$ 程度。

CO(J=1-0) 輝線は回転遷移による。一酸化炭素分子は異核分子のため電気双極子モーメントを持つが、その回転準位がJ=1からJ=0に遷移するときに放射される輝線である。波長は2.6 mm。主に分子雲で観測される。温度は〜数十 K, 密度は〜 $10^2\,\mathrm{cm^{-3}}$ 以上。

Hα（バルマーα）輝線は再結合線であり、水素原子の主量子数n=3からn=2のエネルギー準位に遷移するときに放射される。波長は656.3 nm。太陽の彩層や星形成領域などの電離水素領域で観測される。温度は 10000 K, 密度は 10〜$10^4\,\mathrm{cm^{-3}}$ 程度。

(3) $h\nu \ll kT$ なので $\dfrac{h\nu}{kT} \ll 1.$　したがって

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

と一次近似できるため、与式は

$$\frac{2h\nu^3/c^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \frac{2\nu^2}{c^2}kT$$

となる（レイリー＝ジーンズ近似）。

(4) $z = 0$ のとき

$$\Phi(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a+b)^2}}$$

このポテンシャル下で質量 m の物体が受ける力は

$$m\frac{\partial\Phi}{\partial R} = mGMR\{R^2 + (a+b)^2\}^{-\frac{3}{2}}$$

である。これが円運動する物体の向心力として働くとき、つり合いの式は

$$m\frac{v^2}{R} = mGMR\{R^2 + (a+b)^2\}^{-\frac{3}{2}}$$

となるので、

$$v(R) = \frac{\sqrt{GM}R}{\{R^2 + (a+b)^2\}^{\frac{3}{4}}}$$

と求められる。

2. (1) 光の吸収量は元々のspecific intensityと進んだ距離に比例するため $-\alpha_\nu I_\nu ds$,

放射量は進んだ距離に比例するため $j_\nu ds$ と表せる。したがって

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds + j_\nu ds$$

(2) 両辺を$\alpha_\nu ds$で割る。

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$$

(3) (2)の結果を書き換えて

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

両辺にe^{τ_ν}を掛ける。

$$e^{\tau_\nu}\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu e^{\tau_\nu} + S_\nu e^{\tau_\nu}$$

ここで

$$\frac{d(I_\nu e^{\tau_\nu})}{d\tau_\nu} = e^{\tau_\nu}\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu e^{\tau_\nu}$$

なので、上式は結局

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\tau_\nu} = \mathcal{S}$$

と表せる。

(4) これを積分する。

$$\mathcal{I}(\tau_\nu) = \mathcal{I}(0) + \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau'_\nu) d\tau'_\nu$$

(5) 両辺をe^{τ_ν}で割る。

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)}\, S_\nu(\tau'_\nu)\, d\tau'_\nu$$